



QUANPIN ZHINENGZUOYE

智能作业

全品

高中数学⁴
必修第四册
RJB

主编：肖德好

天津出版传媒集团
天津人民出版社

编写依据

以新教材为本，以课程标准（2017年版2020年修订）为纲。

选题依据

- 研究新教材使用地区最新题源，研究新教材新课标形式下的同步命题特点。
- 选题注重落实必备知识，满足同步教学中的基础性要求，兼顾一定的综合性。
- 强调试题的情境性、开放性，拓展学科知识的应用性和创新性。

▼ 课时作业

特点一 课时作业，分层设置

- 夯实基础——巩固必备知识、落实规范解答
- 素养提能——提升学科素养、形成关键能力
- 思维训练——拓广解题思路、探索新颖题目



特点二 不断进行复习巩固，对常见题型进行总结

- 素养测评滚动——对知识进行阶段测评，验收每一阶段学习成果
- 热点题型探究——题型方法全面概括，解析本章热点题型

▼ 素养测评卷

单元素养测评卷

知识覆盖到位，有助查漏补缺

阶段素养测评卷

模块素养测评卷

覆盖全书知识，精准备战期末



**精选一线好题，拒绝知识倒挂、选题超纲现象，
助力同步高效学习！**



CONTENTS

全品智能作业·数学 RJB

09

第九章 解三角形

9.1 正弦定理与余弦定理	001
9.1.1 正弦定理	001
9.1.2 余弦定理	003
第1课时 余弦定理 / 003	
第2课时 正、余弦定理的综合应用 / 005	
9.2 正弦定理与余弦定理的应用	007
第1课时 正、余弦定理在实际问题中的应用 / 007	
第2课时 用正、余弦定理解决与三角形有关的问题 / 010	
☑ 素养测评滚动(一)	012
9.3 数学探究活动: 得到不可达两点之间的距离	014
☑ 热点题型探究(一)	016

- 题型1 利用正、余弦定理解三角形 / 016
- 题型2 利用正、余弦定理判定三角形的形状 / 016
- 题型3 三角形中最值与范围问题 / 017
- 题型4 正、余弦定理在实际问题中的应用 / 017
- 题型5 与三角形有关的综合问题 / 018

10

第十章 复数

10.1 复数及其几何意义	019
10.1.1 复数的概念	019
10.1.2 复数的几何意义	021
10.2 复数的运算	023
10.2.1 复数的加法与减法	023
10.2.2 复数的乘法与除法	025
☑ 素养测评滚动(二)	027
* 10.3 复数的三角形式及其运算	029
☑ 热点题型探究(二)	031

- 题型1 复数的概念及几何意义 / 031
- 题型2 复数的计算 / 031

11

第十一章 立体几何初步

11.1 空间几何体	032
11.1.1 空间几何体与斜二测画法	032

11.1.2 构成空间几何体的基本元素	034
11.1.3 多面体与棱柱	036
11.1.4 棱锥与棱台	038
11.1.5 旋转体	040
11.1.6 祖暅原理与几何体的体积	042
☛ 素养测评滚动(三)	044
11.2 平面的基本事实与推论	046
11.3 空间中的平行关系	048
11.3.1 平行直线与异面直线	048
11.3.2 直线与平面平行	050
11.3.3 平面与平面平行	053
☛ 素养测评滚动(四)	056
11.4 空间中的垂直关系	058
11.4.1 直线与平面垂直	058
第1课时 异面直线所成的角、直线与平面垂直的判定定理 / 058	第2课时 直线与平面垂直的性质、线面角 / 061
11.4.2 平面与平面垂直	063
第1课时 二面角、平面与平面垂直的判定定理 / 063	第2课时 平面与平面垂直的性质定理 / 066
☛ 素养测评滚动(五)	069
☛ 热点题型探究(三)	071

- 题型1 空间几何体与球的“切”“接”问题 / 071
- 题型2 空间几何体表面积与体积的计算 / 071
- 题型3 空间几何体表面的展开与折叠 / 071
- 题型4 构造模型判断空间线面位置关系 / 072
- 题型5 空间中平行与垂直的判定、性质及应用 / 073
- 题型6 空间角的求法 / 073
- 题型7 平面图形的翻折问题 / 074

■ 参考答案	075
--------	-----

◆ 素养测评卷 ◆

单元素养测评卷(一)A	卷1	单元素养测评卷(三)B	卷11
单元素养测评卷(一)B	卷3	模块素养测评卷(一)	卷13
单元素养测评卷(二)	卷5	模块素养测评卷(二)	卷15
阶段素养测评卷	卷7	参考答案	卷17
单元素养测评卷(三)A	卷9		

第九章 解三角形

9.1 正弦定理与余弦定理

9.1.1 正弦定理

基础 夯实篇

- 在 $\triangle ABC$ 中, $a=7, c=5$, 则 $\frac{\sin A}{\sin C}$ 的值是 ()
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{5}$ D. $\frac{5}{7}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=5, A=60^\circ, S_{\triangle ABC}=5\sqrt{3}$, 则 $c=$ ()
A. 4 B. 16
C. 21 D. $\sqrt{21}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A=45^\circ, B=30^\circ, a=2$, 则 b 等于 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. 1
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $b=2, c=2\sqrt{3}, C=60^\circ$, 则角 B 等于 ()
A. 30° B. 45°
C. 135° D. 90°
- 在 $\triangle ABC$ 中, $B=45^\circ, C=60^\circ, c=1$, 则 $\triangle ABC$ 的最短边的长为 ()
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则满足 $a=10, b=18, A=30^\circ$ 的三角形解的个数是_____.
- 已知 $\triangle ABC$ 的周长为18, 若 $\sin A : \sin B : \sin C=2 : 3 : 4$, 则此三角形中最大边的长为_____.

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=30^\circ, C=105^\circ, b=4$, 求解这个三角形.

素养 提能篇

- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \cos B = \sqrt{3} b \sin A$, 则 $B=$ ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b=2, B=\frac{\pi}{6}, C=\frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. $2\sqrt{3}+2$ B. $\sqrt{3}+1$
C. $2\sqrt{3}-2$ D. $\sqrt{3}-1$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $2b \cos B - a \cos C = c \cos A$, 且 $b^2 = ac$, 则 $\sin A \sin C=$ ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

思维训练篇

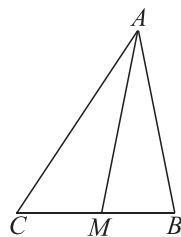
12. (多选题) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 根据下列条件解三角形, 其中仅有一解的有 ()
- A. $a=4, b=5, c=6$
 B. $A=30^\circ, B=45^\circ, c=5$
 C. $a=\sqrt{3}, b=2, A=45^\circ$
 D. $a=3, b=2, C=60^\circ$
13. (多选题) 对于 $\triangle ABC$, 下列说法中正确的是 ()
- A. 若 $\sin A < \sin B$, 则 $A < B$
 B. 若 $\sin A = \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形
 C. 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形
 D. 若 $\tan A + \tan B + \tan C > 0$, 则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, 点 D 在 BC 边上, 且 $BD = 2DC$, $\angle BAD = 2\angle DAC$, 则 $\frac{\sin B}{\sin C} =$ _____.
15. 在锐角三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $A = 2B$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 _____.
16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $a + 2a \cos B = c$.
- (1) 求证: $B = 2A$;
 (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c = 2$, 求 a 的取值范围.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \sin A = \sqrt{3} a \cos B$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = \sqrt{3}$, 则 $a + 3c$ 的最小值是 ()

- A. 4 B. 8
 C. $3 + 2\sqrt{3}$ D. $4 + 2\sqrt{3}$

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\cos A = \frac{3}{4}$, $B = 2A$, $b = 3$.

- (1) 求 a ;
 (2) 如图, 已知点 M 在边 BC 上, 且 AM 平分 $\angle BAC$, 求 $\triangle ABM$ 的面积.



9.1.2 余弦定理

第1课时 余弦定理

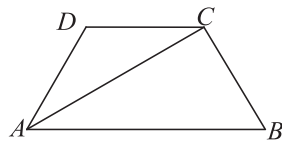
基础夯实篇

- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b=\sqrt{3}$, $A=30^\circ$, $c=2$,则 $a=$ ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 2
- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=\sqrt{13}$, $b=4$, $c=3$,则 $\cos A=$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $BC=2\sqrt{3}$, $\angle BAC=120^\circ$,则 $AC=$ ()
A. 2 B. 3
C. $2\sqrt{3}$ D. 4
- 在钝角三角形 ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c ,若 $C=30^\circ$, $c=1$, $a=\sqrt{3}$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$
- (多选题)在 $\triangle ABC$ 中,下列等式不成立的是 ()
A. $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$
B. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$
C. $a\sin C=c\sin A$
D. $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$
- 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,且 $a=2b\cos C$,则这个三角形一定是_____三角形.
- 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c .若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , $a=2$, $4S=b^2+c^2-4$,则 $A=$ _____.

- 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ,且 $a^2=b^2+c^2-bc$.
(1)求角 A 的大小;
(2)若 $b=2$, $c=3$,求 a 的值;
(3)若 $a^2=bc$,判断 $\triangle ABC$ 的形状.

素养提能篇

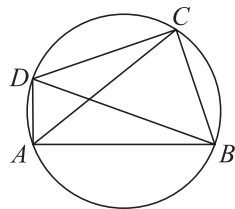
- $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,若 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $B=\frac{\pi}{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,则 $b=$ ()
A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. 2 D. $\sqrt{6}$
- 在钝角三角形 ABC 中,已知 $a=1$, $b=2$,则最长边 c 的取值范围是 ()
A. $(\sqrt{3},3)$ B. $(2,3)$
C. $(\sqrt{5},3)$ D. $(\sqrt{6},3)$
- 在如图所示的平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $\angle CAB=30^\circ$, $AC\perp CB$, $\angle ADC=120^\circ$,则 DA^2+DC^2 的最小值为 ()
A. 4 B. 8
C. $4\sqrt{3}$ D. $8\sqrt{2}$
- (多选题)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,若 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=ac$,则角 B 的大小可能为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$



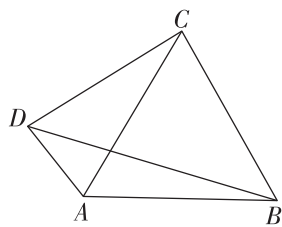
思维训练篇

13. (多选题) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 则下列说法正确的是 ()
- A. 若 $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{15}, A = 30^\circ$, 则符合条件的 $\triangle ABC$ 有两个
- B. 若 $a = 8, c = 10, B = 60^\circ$, 则符合条件的 $\triangle ABC$ 有且只有一个
- C. 若 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, 则 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形
- D. 若 $a \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形
14. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{a^2 - (b-c)^2}{bc} = 1$, 则角 $A =$ _____.
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2$ 且 $AC = 3BC$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 _____.
16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2, BC = 4, B = 30^\circ$, 且边 AB, BC 上的中线 CD, AE 交于点 M .
- (1) 求边 AB 的长;
- (2) 求 $\cos \angle AMC$ 的值.

17. 如图, 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 已知对角线 BD 为圆的直径, $AB = AC = 2\sqrt{2}, AD = 1$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ 的值为 _____.



18. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD = 1, CD = 2, \triangle ABC$ 为等边三角形, 记 $\angle ADC = \alpha$.
- (1) 若 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ABD$ 的面积;
- (2) 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\triangle ABD$ 的面积取值范围.



第2课时 正、余弦定理的综合应用

基础 夯实篇

1. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,若 $a=2, b=3, \cos C=-\frac{1}{4}$,则 $\sin A=$ ()
 A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$ B. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$
2. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,若 $B=\frac{\pi}{3}, b=6, \sin A-2\sin C=0$,则 $a=$ ()
 A. 3 B. $2\sqrt{3}$
 C. $4\sqrt{3}$ D. 12
3. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $\frac{\sin C}{\sin A + \sin B} + \frac{b}{a+c} = 1$,则角 $A=$ ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,若 $A+B=2C$,且 $\sin^2 C = \sin A \sin B$,则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()
 A. 直角三角形
 B. 等腰非等边三角形
 C. 等边三角形
 D. 钝角三角形
5. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{3}{5}, C = \frac{2\pi}{3}, c = 7$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
 A. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{15\sqrt{2}}{4}$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $3\sin A = 2\sin C, \cos B = \frac{1}{3}$,则 $\sin A =$ _____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, a = 2\sqrt{2}, c = 4, a \cos B = b \sin A$,则 $b =$ _____.

8. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $\frac{\cos C}{c} = \frac{\cos A}{3b-a}$.
 (1)求 $\sin C$ 的值;
 (2)若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{2}$,且 $c = \sqrt{6}(a-b)$,求 $\triangle ABC$ 的周长.

素养 提能篇

9. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,若 $B = \frac{\pi}{3}, b^2 = \frac{9}{4}ac$,则 $\sin A + \sin C =$ ()
 A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$
 C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
10. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $a=3, b=1, \cos C = -\frac{1}{3}$,则 AB 边上的高为 ()
 A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $(a-b) \cdot \sin A = c \sin C - b \sin B$,若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$,则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为 ()
 A. $4\sqrt{3}$ B. $3+4\sqrt{3}$
 C. $6\sqrt{3}$ D. $3+6\sqrt{3}$

思维训练篇

12. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $a^2 + c^2 = b^2 + 2accos C$ 且 $a = 2bsin A$,则 $A =$ ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

13. (多选题)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}b = 3, B = 2C$,则下列说法正确的是 ()

- A. $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $a = \frac{c}{3}$
C. $a = c$ D. $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}$

14. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB = 2, C = \frac{\pi}{3}$,且 $\sin A \sin B = \frac{9}{28}$,则 $BC + AC =$ _____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $a \sin A \sin B = \frac{5}{4}b - b \cos A, b + c = 10$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{25\sqrt{3}}{4}$,则 $a =$ _____.

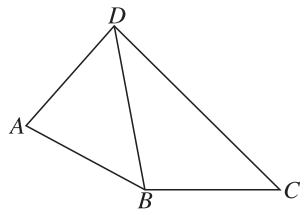
16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}, A = \frac{\pi}{3}$.

- (1)若 $2\sin C = 3\sin B$,求 a ;
(2)若 D 为 BC 边的中点,求线段 AD 长的最小值.

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 3, BC = 7$,点 D, E 是边 BC 上的两点,点 D 在 B, E 之间, $\angle BAD = \angle CAE, AB \perp AE$,则 $\frac{AD}{DE} =$ _____.

18. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, C, D 为定点, $CD = \sqrt{3}, A, B$ 为动点,且满足 $AB = BC = DA = 1$.

- (1)若 $C = \frac{\pi}{4}$,求 $\cos A$ 的值;
(2)设 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 的面积分别为 S 和 T ,求 $S^2 + T^2$ 的最大值.



9.2 正弦定理与余弦定理的应用

第1课时 正、余弦定理在实际问题中的应用

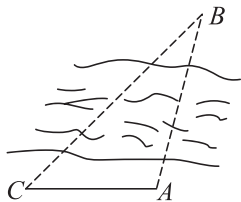
基础 夯实篇

1. 某班同学利用课外实践课,测量 A, B 两地之间的距离,在 C 处测得 A, C 两地之间的距离是 4 千米, B, C 两地之间的距离是 6 千米,且 $\angle ACB = 60^\circ$,则 A, B 两地之间的距离是 ()

A. $2\sqrt{7}$ 千米 B. $4\sqrt{3}$ 千米
C. $2\sqrt{19}$ 千米 D. $6\sqrt{2}$ 千米

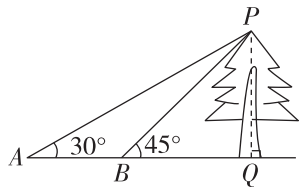
2. 如图,设 A, B 两点在河的两岸,某测量者在与 A 同侧的河岸边选定一点 C ,测出 A, C 两点间的距离为 50 m, $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle CAB = 105^\circ$,则 A, B 两点间的距离为 ()

A. $50\sqrt{2}$ m
B. $50\sqrt{3}$ m
C. $25\sqrt{2}$ m
D. $\frac{50\sqrt{6}}{3}$ m



3. 如图所示,为了测量一棵树的高度 PQ ,在地面上选取 A, B 两点(A, B, Q 三点共线),从 A, B 两点测得树尖 P 的仰角分别为 30° 和 45° ,且 A, B 两点之间的距离为 80 m,则树的高度为 ()

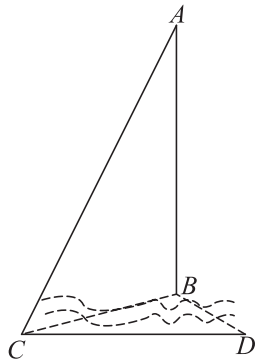
A. $(40 + 40\sqrt{3})$ m
B. $(40 + 20\sqrt{3})$ m
C. $(20 + 40\sqrt{3})$ m
D. $(20 + 4\sqrt{3})$ m



4. 如图,测量河对岸的某一高层建筑物 AB 的高度时,可以选择与建筑物的最低点 B 在同一水平面内的两个观测点 C 和 D ,测得 $\angle BCD = 15^\circ$,

$\angle BDC = 30^\circ$, $CD = 30$ m,并在 C 处测得建筑物顶端 A 的仰角为 60° ,则建筑物 AB 的高度为 ()

A. $30\sqrt{6}$ m
B. $15\sqrt{6}$ m
C. $5\sqrt{6}$ m
D. $15\sqrt{2}$ m

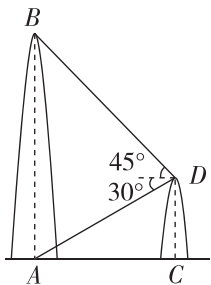


5. (多选题)一艘客船上上午 9:30 在 A 处,测得灯塔 S 在它北偏东 30° 的方向上,之后它以每小时 32 海里的速度继续沿正北方向匀速航行,并于上午 10:00 到达 B 处,此时测得船与灯塔 S 相距 $8\sqrt{2}$ 海里,则灯塔 S 在 B 的 ()

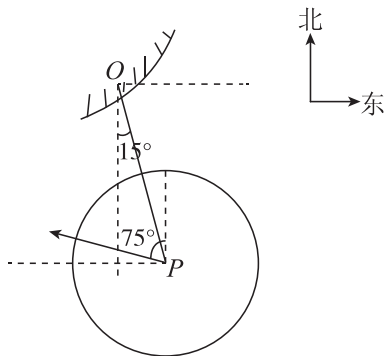
A. 北偏东 75° 方向上
B. 北偏东 15° 方向上
C. 南偏东 15° 方向上
D. 南偏东 45° 方向上

6. 某林场为了及时发现火情,设立了两个观测点 A 和 B .某日两个观测点的林场人员都观测到 C 处出现火情.在 A 处观测到火情发生在北偏西 40° 方向,而在 B 处观测到火情发生在北偏西 60° 方向.已知 B 在 A 的正东方向 10 km 处,那么 C 与 A 的距离约为 _____ km. ($\sin 20^\circ \approx 0.34$,结果精确到 0.1 km)

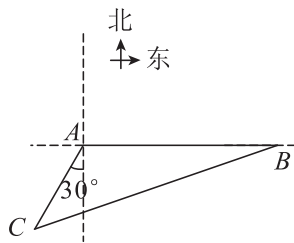
7. 如图,已知山体 AB 与山体 CD 的底部在同一水平面上,且两个山体的高线 AB 与 CD 均与水平面垂直, $CD = 300\sqrt{3}$ m,在山体 CD 的最高点 D 处测得山体 AB 的山顶 B 的仰角为 45° ,测得山体 AB 的山底 A 的俯角为 30° ,则 $BD =$ _____ m.



8. 如图所示,在某海滨城市 O 附近的海面上正形成台风.据气象部门监测,目前台风中心位于城市 O 的南偏东 15° 方向相距 200 km 的海面 P 处,并以 10 km/h 的速度向北偏西 75° 方向移动.台风侵袭的范围为圆形区域,目前圆形区域的半径为 100 km ,并以 20 km/h 的速度不断增大.问大约几小时后该城市开始受到台风侵袭?(精确到 0.1 h)

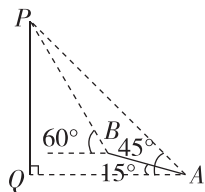


10. 如图所示,位于 A 处的信息中心获悉,在其正东方向相距 40 海里的 B 处有一艘渔船遇险,在原地等待营救.信息中心立即把消息告知在其南偏西 30° 方向相距 20 海里的 C 处的乙船,现乙船朝北偏东 θ 方向,即沿直线 CB 前往 B 处救援,则 $\cos \theta =$ ()



- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$
C. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{28}$

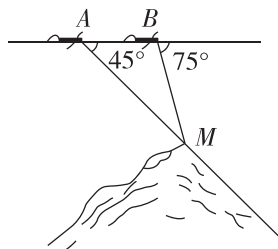
11. 如图,在山脚 A 处测得山顶 P 的仰角为 45° ,沿倾斜角为 15° 的斜坡向上走了 90 米到达 B 处 (A, B, P, Q 在同一个平面内),在 B 处测得山顶 P 的仰角为 60° ,则山高 PQ 为 ()



- A. $45(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 米
B. $45(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ 米
C. $90(\sqrt{3} - 1)$ 米
D. $90(\sqrt{3} + 1)$ 米

素养 提能篇

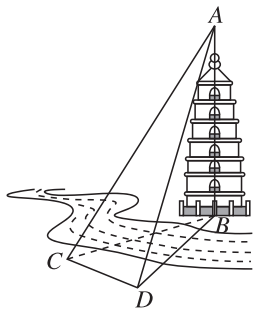
9. 如图,一架高空侦察飞机以 600 m/s 的速度在海拔 $16\ 000\text{ m}$ 的高空沿水平方向飞行,在 A 点处测得某山顶 M 的俯角为 45° ,经过 15 s 后在 B 点处测得该山顶的俯角为 75° ,若点 A, B, M 在同一个铅垂平面内,则该山顶的海拔高度约为 $(\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732)$ ()



- A. 2436 m B. 3706 m
C. 3200 m D. 3146 m

12. 在同一平面上有相距 14 千米的 A, B 两座炮台, A 在 B 的正东方向.某次演习时, A 向西偏北 θ 方向发射炮弹, B 则向东偏北 θ 方向发射炮弹,其中 θ 为锐角,观测回报两炮弹皆命中 18 千米外的同一目标 C ,接着 A 再向西偏北 $\frac{\theta}{2}$ 方向发射炮弹,弹着点为 18 千米外的点 M ,则 B 炮台与弹着点 M 的距离为 ()
- A. 7 千米 B. 8 千米
C. 9 千米 D. 10 千米

13. (多选题) 如图, 某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB (A 为塔顶, B 为塔底) 的高度, 选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D (B, C, D 不在同一直线上), 测得 $CD = s$. 测绘兴趣



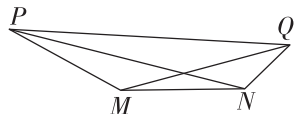
小组利用测角仪可测得的角有 $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADC, \angle BDC$, 则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是 ()

- A. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$
 B. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
 C. $s, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$
 D. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$

14. (多选题) 湖光岩玛珥湖位于广东省湛江市麻章区湖光镇, 是中国乃至世界最大的湿玛珥湖, 是中国玛珥湖研究的始发点, 也是世界玛珥湖研究的关键点. 某小组计划测量如图①所示的湖光岩玛珥湖的东西方向的总湖长, 即测量湖光岩玛珥湖湖岸的两个测量基点 P, Q 之间的距离. 如图②, 在湖光岩玛珥湖的湖岸取另外两个测量基点 M, N (P, Q, N, M 在同一平面上), 测得 $MN = 380\sqrt{5}$ 米, $\angle PMQ = \frac{3\pi}{4}, \angle QMN = \angle PNM = \frac{\pi}{12}, \angle PNQ = \frac{2\pi}{3}$, 则 ()

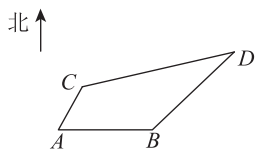


图①

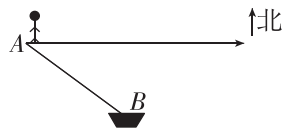


图②

- A. $MQ = 380\sqrt{10}$ 米 B. $PM = 380\sqrt{5}$ 米
 C. $PN = 380\sqrt{10}$ 米 D. $PQ = 1900$ 米
15. 如图, 有三座城市 A, B, C , 其中 B 在 A 的正东方向, 且与 A 相距 120 km; C 在 A 的北偏东 30° 方向, 且与 A 相距 60 km. 一架飞机从城市 C 出发, 沿北偏东 75° 航向飞行. 当飞机飞行到城市 B 的北偏东 45° 的 D 点处时, 飞机出现故障, 必须在城市 A, B, C 中选择一个最近城市降落, 则该飞机必须再飞行 _____ km 才能降落.



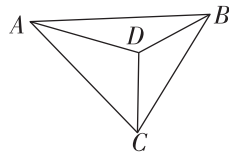
16. 如图, 某运动员从 A 市出发沿海岸一条笔直的公路以每小时 5 km 的速度向东进行长跑训练, 长跑开始时, 在 A 市南偏东方向距 A 市 25 km 且与海岸距离为 15 km 的海上 B 处有一艘小艇与运动员同时出发, 要追上这位运动员, 小艇沿直线航行.



- (1) 小艇至少以多大的速度行驶才能追上这位运动员?
 (2) 求小艇以最小速度行驶时的行驶方向与 AB 的夹角.

思维训练篇

17. 已知 D 是某人工湖上的一个小岛, A, B, C 是湖边的三栋建筑 (A, B, C, D 在同一平面内). 若 C, D 之间有直线型栈道, 长为 30 m. 在 C 点测得 $\angle ACD = 45^\circ, \angle BCD = 30^\circ$; 在 D 点测得 $\angle ADB = 135^\circ, \angle BDC = 120^\circ$. 则 A, B 之间的距离为 ()



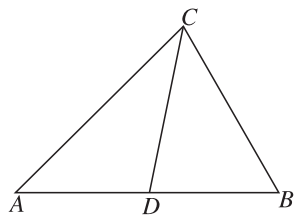
- A. $30\sqrt{5}$ m B. $30\sqrt{3}$ m
 C. $30\sqrt{2}$ m D. $30\sqrt{6}$ m

第2课时 用正、余弦定理解决与三角形有关的问题

基础 夯实篇

1. 已知锐角三角形 ABC 的面积为 $3\sqrt{3}$, $BC=4$, $CA=3$, 则角 C 的大小为 ()
 A. 75° B. 60°
 C. 45° D. 30°
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $b\cos C + c\cos B = a\sin A$, 则角 A 为 ()
 A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$
 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 则 $\frac{a-2b+c}{\sin A - 2\sin B + \sin C}$ 的值为 ()
 A. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$ B. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$
 C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()
 A. 直角三角形
 B. 等腰三角形或直角三角形
 C. 等腰直角三角形
 D. 正三角形
5. 已知锐角三角形的三边长分别为 $1, 3, a$, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $(8, 10)$ B. $(2\sqrt{2}, \sqrt{10})$
 C. $(2\sqrt{2}, 10)$ D. $(\sqrt{10}, 8)$
6. (多选题) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 已知 $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{b}{2a-c}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 且 $b=3$, 则 ()
 A. $\cos B = \frac{1}{2}$ B. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. $a+c = \sqrt{3}$ D. $a+c = 3\sqrt{2}$
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a^2 + b^2 = c^2 + ab$, 则 $C =$ _____.

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, D 为 AB 边上一点, $AD=4$, $CD=5$, $AC=7$.
 (1) 求 $\sin \angle ACB$ 的值;
 (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

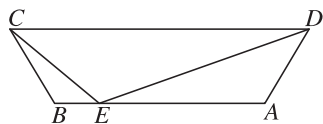


素养 提能篇

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 1$, $b\cos A = 1 + \cos B$, 则 b 的取值范围为 ()
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
 C. $(0, 2)$ D. $(2, 3)$
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 向量 $m = (\sqrt{3}, \sin B)$, $n = (1, \cos B)$, 且 $m \parallel n$, 点 M 为边 BC 的中点, 且 $AM = AC$, 则 $\sin \angle BAC =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
11. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BC=2$, D 为 AC 的中点, 且 $AC=BD$, 点 E 在直线 BC 上, 且 $AE \perp BC$, 则线段 AE 的长的最大值为 ()
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$
 C. 2 D. $\frac{8}{3}$

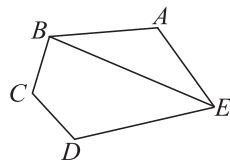
思维训练篇

12. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b^2 = a^2 + \frac{c^2}{2}$, AB 边上的中线长为 2, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ()
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$
- C. $2\sqrt{3}$ D. 4
13. (多选题) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $(a+b)(\sin A + \sin B) = c \sin C + a \sin B$, $c=6$, 则下列结论正确的是 ()
- A. $C = \frac{\pi}{3}$
- B. $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $2\sqrt{3}$
- C. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$
- D. 若 CD 为 $\triangle ABC$ 的中线, 则 CD 的最小值为 $\sqrt{3}$
14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 若 $c = \sqrt{7}$, $C = \frac{\pi}{3}$, $(c-a+b)(c+a-b) = 6$, 则 $a+b =$ _____.
15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b=4, a+c=2\sqrt{5}$, 且 $b \sin A + \sqrt{3} a \cos B = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.
16. 如图所示, 在平面四边形 $ABCD$ 中, E 为 AB 上一点, 连接 CE, DE , 已知 $AE = 4BE, AE = 4, CE = \sqrt{7}, \angle BAD = \angle ABC = \angle CED = \frac{2\pi}{3}$.



- (1) 求 $\triangle BCE$ 的面积;
- (2) 求 CD 的长.

17. 在锐角三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$, 则 $\frac{\sin A}{\cos B}$ 的取值范围为 ()
- A. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ B. $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
- C. $(\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$
18. 某市规划一条平面示意图为如图所示的五边形 $ABCDE$ 的自行车赛道, ED, DC, CB, BA, AE 为赛道(不考虑宽度), BE 为赛道内的一条服务通道, $\angle BCD = \angle CDE = \angle BAE = \frac{2\pi}{3}$, $DE = 4$ km, $BC = CD = \sqrt{3}$ km.
- (1) 求服务通道 BE 的长度.
- (2) 应如何设计, 才能使折线段赛道 BAE 最长?



素养测评滚动(一) [范围 9.1~9.2]

(时间:45分钟 分值:100分)

一、单项选择题:本题共6小题,每小题5分,共30分.

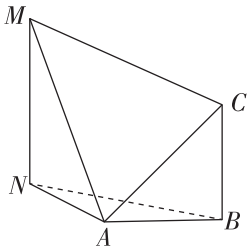
1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=2, AC=3, A=60^\circ$,则 $BC=$ ()
 A. 9 B. 19
 C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{19}$
2. 海面上有 A, B 两个小岛相距10海里,从 A 岛望 C 岛和 B 岛成 60° 的视角,从 B 岛望 C 岛和 A 岛成 75° 的视角,则 B, C 两岛间的距离是 ()
 A. $10\sqrt{3}$ 海里 B. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ 海里
 C. $5\sqrt{2}$ 海里 D. $5\sqrt{6}$ 海里
3. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a=7, b=8, \cos B=-\frac{1}{7}$,则角 A 的大小为 ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$
 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $2\cos B\sin A=\sin C$,则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 A. 直角三角形
 B. 等腰三角形
 C. 等腰直角三角形
 D. 等腰或直角三角形
5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,若 $ab=4\sqrt{3}$,且 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin A\sin B=\sin^2 C$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
 A. 1 B. 4
 C. 3 D. $\sqrt{3}$
6. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $B=\frac{\pi}{3}, \vec{AB} \cdot \vec{BC}=-2$,且满足 $\sin A+\sin C=2\sin B$,则该三角形的外接圆半径 $R=$ ()
 A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 C. $\sqrt{3}$ D. 2

二、多项选择题:本题共2小题,每小题6分,共12分.

7. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,则能满足 $(a^2-b^2+c^2)\tan B=ac$ 的角 B 的值可以为 ()
 A. 30° B. 60°
 C. 120° D. 150°
8. 下列说法正确的是 ()
 A. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C<1$,则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形
 B. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=\sqrt{3}, AC=1, B=30^\circ$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. 在锐角三角形 ABC 中,不等式 $\sin A>\cos B$ 恒成立
 D. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $B=\frac{\pi}{3}, a=2\sqrt{3}$,且 $\triangle ABC$ 有两解,则 b 的取值范围是 $(3, 2\sqrt{3})$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4, b=5, c=6$,则 $\cos A=$ _____.
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=1$ 且 $\cos A=-\frac{\sqrt{10}}{10}, B=\frac{\pi}{4}$,则 BC 边上的高为_____.
11. 如图,为测量山高 MN ,选 M 择 A 和另一座山的山顶 C 为测量点,从点 A 测得点 M 的仰角 $\angle MAN=45^\circ$,点 C 的仰角 $\angle CAB=30^\circ$ 以及 $\angle MAC=75^\circ$.从点 C 测得 $\angle MCA=45^\circ$,已知山高 $BC=480\sqrt{3}$ m,且两山山底与 A 在同一水平面上,则山高 $MN=$ _____ m.



四、解答题: 本题共 3 小题, 共 43 分.

12. (13 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , $\tan C = (a-1)\tan B$.

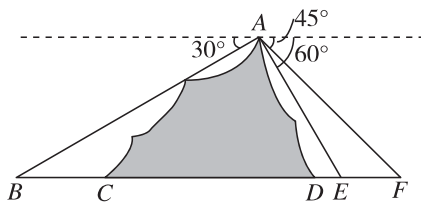
(1) 求证: $b\cos C = 1$;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 1, 求 c 的值.

13. (15 分) 高铁是我国的国家名片之一, 高铁的修建凝聚着中国人的智慧与汗水. 如图所示, B, E, F 为山脚两侧共线的三点, 在山顶 A 处测得这三点的俯角分别为 $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$, 计划沿直线 BF 开通穿山隧道, 现已测得 BC, DE, EF 三段的长度分别为 3 km, 1 km, 2 km.

(1) 求线段 AE 的长度;

(2) 求隧道 CD 的长度.



14. (15 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\sin C + \sqrt{3}\cos C = a, b = \sqrt{3}$.

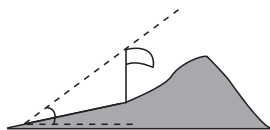
(1) 若 $a+c=2$, 点 D 在边 AC 上, BD 平分 $\angle ABC$, 求线段 BD 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, E 为 AC 的中点, 求线段 BE 的长的取值范围.

9.3 数学探究活动：得到不可达两点之间的距离

1. 问题的提出

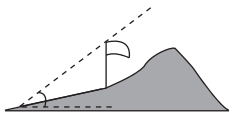

通过正弦定理和余弦定理的学习,我们知道借助米尺与测量角度的仪器,可以得出不可达两点之间的距离.高一(2)班的同学想利用所学知识对学校周边山上的旗杆和学校广场旗杆进行高度测量,检验所学知识.



2. 活动过程中要制作以下表格,并如实填写.

得到不可达两点之间的距离活动记录表

活动开始时间: _____

(1)成员与分工	
分组	分工
一组	利用正弦定理解决山坡旗杆高度问题
二组	利用正弦定理解决广场旗杆高度问题
(2)选定的不可达两点的状态描述	
(a)山坡上的旗杆	(b)广场上的旗杆
	
(3)活动方案	
(4)活动工具描述	
(5)活动过程中记录的数据	
(6)根据数据计算结果	
(7)活动总结	

活动结束时间: _____

3. 为了得到不可达两点之间的距离,可借助的方法很多,如下题:

在数学建模课上,老师给大家带来了一则新闻:“2019年8月16日,随着最后一方混凝土浇筑到位,高423米的东莞第一高楼民盈国贸中心2号楼(以下简称‘国贸中心’)正式封顶,标志着东莞最高楼纪录诞生,由东莞本地航母级企业民盈集团刷新了东莞天际线,比之前的东莞第一高楼台商大厦高出134米。”在同学们的惊叹中,老师提出了问题:国贸中心真有这么高吗?我们能否运用所学知识测量验证一下?一周后,两个兴趣小组分享了他们各自的测量方案.

第一小组采用的是“两次测角法”:他们在国贸中心隔壁的会展中心广场上的A点测得国贸中心顶部的仰角为 α ,正对国贸中心前进了 s 米后,到达B点,在B点测得国贸中心顶部的仰角为 β ,然后计算出国贸中心的高度(其示意图如图a所示).

第二小组采用的是“镜面反射法”:在国贸中心后面的新世纪豪园一幢11层楼(与国贸中心处于同一水平面,每层约3米)的楼顶天台,进行两个操作步骤:①将平面镜置于天台地面上,人后退至从镜中能看到国贸中心的顶部位置,测量出人与镜子的距离为 a_1 米;②正对国贸中心,将镜子前移 a 米,重复①中的操作,测量出人与镜子的距离为 a_2 米,然后计算出国贸中心的高度(其示意图如图b所示).

实际操作中,第一小组测得 $s=90$ 米, $\alpha=42^\circ$, $\beta=48^\circ$,最终算得国贸中心高度为 H_1 ;第二小组测得 $a_1=1.45$ 米, $a=12$ 米, $a_2=1.4$ 米,最终算得国贸中心高度为 H_2 .假设测量者的“眼高 h ”都为1.6米.

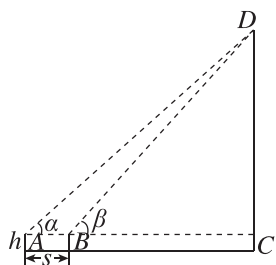


图 a

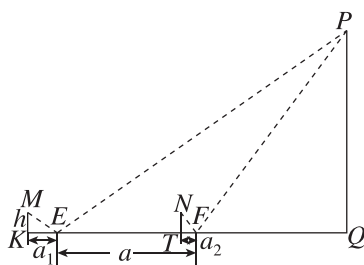


图 b

(1)请你用所学知识帮两个小组完成计算(参考数据: $\tan 42^\circ \approx 0.9004$, $\tan 48^\circ = \frac{1}{\tan 42^\circ}$,答案保留整数结果).

(2)你认为哪个小组的方案更好?说出你的理由.

答 题 区 域

热点题型探究 (一)

题型 1 利用正、余弦定理解三角形

- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6\sqrt{2}$, $C=\frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的周长为 ()
A. 72π B. 24π
C. 36π D. 12π
- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 若 $3\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B$, $\cos C = \frac{3}{5}$, 且 $S_{\triangle ABC} = 4$, 则 $c =$ ()
A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ B. 4 C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. 5
- 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , D 为边 BC 上一点, 且 $AD \sin \angle ADB = c \sin C$, $a - b = 1$, $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. 8 B. 9 C. 12 D. 14
- 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\frac{a}{\sin B} = \frac{b+c}{\sin C + \sin A}$ ”是“ $A=B$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2\cos C(a\cos B + b\cos A) = c$, 则 $C =$ _____; 若 $c = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____.

题型 2 利用正、余弦定理判定三角形的形状

- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 若 $b^2 + c^2 < \frac{1}{2}a^2$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
A. 锐角三角形
B. 钝角三角形
C. 直角三角形
D. 以上都有可能
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\frac{a}{\sin(\frac{\pi}{2}-A)} = \frac{b}{2\cos^2 \frac{B}{2} - 1} = \frac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 钝角三角形
B. 等边三角形
C. 直角三角形
D. 等腰直角三角形
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = c + b \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 锐角三角形
B. 钝角三角形
C. 直角三角形
D. 等边三角形

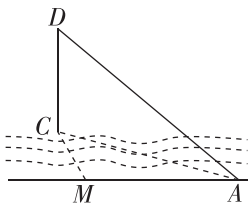
题型3 三角形中最值与范围问题

9. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $B = \frac{\pi}{6}$,则 $\frac{AB}{BC}$ 的取值范围为 ()
- A. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, 2)$
- C. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ D. $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$
10. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,若 $A = \frac{3\pi}{4}$,且 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为4,则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 ()
- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2} + 1$
- C. $2\sqrt{2} - 2$ D. $2\sqrt{2} + 2$

11. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $a \sin A + c \sin C = a \cos C + c \cos A$,若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = tb^2 (t > 0)$,则 t 的最大值为 _____.
12. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,若 $b = 6, ac = \frac{18\sqrt{3}}{\sin B}$,则 B 的取值范围为 _____.
13. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,若 $a^2 = b(b+c)$,且角 C 为钝角,则 $2B - A =$ _____, $\frac{b \cos B}{a \cos B - b \cos A}$ 的取值范围是 _____.

题型4 正、余弦定理在实际问题中的应用

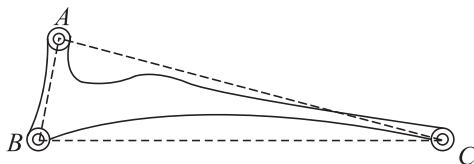
14. 如图,为了测量河对岸一座塔楼 CD 的高度,测量者小王在岸边点 A 处测得塔顶 D 的仰角为 30° ,小王沿河岸向西走了40米到达 M 处,测得 $\angle CMA = 120^\circ, \angle CAM = 15^\circ$,则塔楼 CD 的高度为 ()



- A. 20米 B. 25米
- C. $20\sqrt{3}$ 米 D. $20\sqrt{2}$ 米
15. (多选题)货轮在 A 处测得灯塔 B 在货轮的北偏东 75° 方向上,与 A 处的距离为 $12\sqrt{6}$ 海里,测得灯塔 C 在货轮的北偏西 30° 方向上,与 A 处

的距离为 $8\sqrt{3}$ 海里.货轮自 A 处向正北方向航行到 D 处时,测得灯塔 B 在货轮的南偏东 60° 方向上,则下列说法正确的是 ()

- A. A 处与 D 处之间的距离是24海里
- B. 灯塔 C 与 D 处之间的距离是 $8\sqrt{3}$ 海里
- C. 灯塔 C 在 D 处的西偏南 60° 方向上
- D. D 处在灯塔 B 的北偏西 30° 方向上
16. 如图,在加工一个零件时,需要计算 A, C 两孔中心的距离,已知 $BC = 60.5 \text{ mm}, AB = 15.8 \text{ mm}, \angle ABC = 80^\circ$,则 $AC =$ _____ mm. (结果精确到 0.01 mm)



题型 5 与三角形有关的综合问题

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 $a, b,$

c , 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2, \sqrt{2} b \sin C = c \sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, 在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1, BC = \sqrt{3},$

$AC \perp DC, CD = \sqrt{3} AC$. 设 $\angle ABC = \theta$.

(1) 若 $\theta = 30^\circ$, 求 AD 的长.

(2) 当 θ 多大时, 线段 BD 的长度最大? 并求线段 BD 的长度的最大值.

